Урок №6 (20.09.2007)
Затухающие колебания.

1. Затухающие колебания

Вязкое трение

Если маятник совершает колебания в воздухе, то на него действует сила вязкого трения: $F_{тр} = -\beta\vec{\mathbf{v}}$. В этом случае уравнение колебаний приобретает вид:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} .$$

Вводя обозначения $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ и $2\gamma = \dfrac{\beta}{m}$, получим уравнение:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 .$$

Для нахождения точного решения сначала рассмотрим, что происходит с энергией системы. Предположим, что потери энергии малы за период колебаний.

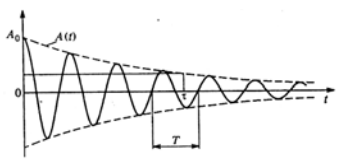
$dE = \vec{\mathbf{F}}_{тр} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$. Учитывая, что $\vec{\mathbf{F}}_{тр}$ и $\vec{\mathbf{v}} = \dfrac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$ противонаправлены, можем записать по оси X: $dE = -\beta v_x dx = -\beta v_x^2 dt$. Таким образом, скорость изменения <u>полной</u> энергии осциллятора пропорциональна его <u>кинетической</u> энергии:

$\dfrac{dE}{dt} = -\beta v_x^2 = -\dfrac{2\beta}{m} E_к$. Так как кинетическая энергия меняется за период колебаний, энергия теряется неравномерно. Если потери малы, то мы можем усреднить потери за период: $\dfrac{dE}{dt} = -\dfrac{2\beta}{m}\langle E_к \rangle$.

Заметим, что в гармоническом осцилляторе $\langle E_к \rangle = \dfrac{1}{2}E$, поэтому окончательно получаем $\dfrac{dE}{dt} = -2\gamma E$.

Решением этого дифференциального уравнения первого порядка является функция $E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$, где E_0 – энергия системы в начальный момент времени.

Энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, поэтому для амплитуды затухающих колебаний можно записать $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$, а график затухающих колебаний будет иметь вид, показанный на рис.



Время, равное $\tau = 1/\gamma$, называют *время жизни колебаний*.

Для того, чтобы наши рассуждения были верны, необходимо, чтобы $\tau \gg T$.

Найдя выражение для амплитуды колебаний, мы можем получить полное решение нашего уравнения колебаний $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Очевидно, что решение не должно сильно отличаться от решения для свободных колебаний (с точностью до изменений амплитуды): $x(t) = A(t)\cos(\omega t + \alpha) = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$.

Итак:

$$\dot{x}(t) = A_0\left(-\gamma e^{-\gamma t}\right)\cos(\ ) + A_0 e^{-\gamma t}\left(-\omega\sin(\ )\right),$$ и

$$\ddot{x}(t) = A_0 e^{-\gamma t}\left\{\left(\gamma^2\right)\cos(\ ) + (-\gamma)\left(-\omega\sin(\ )\right) + (-\gamma)\left(-\omega\sin(\ )\right) + \left(-\omega^2\cos(\ )\right)\right\}$$

Подставляя этот кошмар в наше уравнение и сокращая A_0, $e^{-\gamma t}$ и подобные, получим уравнение $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, откуда находим $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Вот так решаются дифференциальные уравнения второго порядка...

2. *Задачи*

Продолжение решения задач прошлого урока